

В Российском обществе актуариев

## Международная актуарная нотация

А.Лельчук,  
руководитель актуарного отдела  
СК “Ренессанс страхование”,  
руководитель комитета по страхованию жизни  
Российского общества актуариев, к.т.н.  
О.Береснева,  
актуарий Военно-страховой компании

### Преамбула

В Российском обществе актуариев действует комитет по страхованию жизни, в состав которого входят представители таких страховых компаний как Росгострах, Ингосстрах, Военно-страховая компания, Принципал и Ренессанс страхование, а также МГУ, МГТУ и Центра информационно-аналитических технологий страхового рынка (ЦИАТ).

Основными направлениями деятельности комитета являются:

- налогообложение и регулирование страхования жизни;
- разработка гибких страховых продуктов - Универсальное (Universal) страхование жизни, Универсальное переменное (Universal Variable) страхование жизни и др.;
- разработка продуктов по страхованию здоровья - страхование на случай критических болезней (Dread Disease), страхование дохода на период длительной нетрудоспособности (Disability Income или PNI) и др.;
- резервирование по страхованию жизни и здоровья;
- поиск и анализ необходимой статистической информации и т.д.

Комитет рассчитывает работать в тесном сотрудничестве с Департаментом страхового надзора при Министерстве финансов РФ и комитетом по личному страхованию Всероссийского союза страховщиков.

Члены комитета планируют ряд публикаций по актуальным, но не обязательно актуарным, вопросам страхования жизни и здоровья. Хотя первая из этих публикаций является чисто актуарной, предполагается, что большинство статей будут посвящены более общим страховым вопросам.

### Предисловие

На собраниях Общества актуариев старейшина российских актуариев Э.Т.Кагаловская неоднократно призывала использовать в работе Международную актуарную нотацию - применять иные обозначения так же неприлично, как использовать собственные обозначения для интегралов или дифференциалов. Отвечая на этот призыв, авторы подготовили первое издание Международной актуарной нотации на русском языке.

Актуарная нотация была разработана Джорджем Кингом в 1887 году и принята на Втором международном актуарном конгрессе в 1898 году. Небольшие изменения в нее были внесены на Третьем международном конгрессе в 1900 году. Последние уточнения в актуарную нотацию были внесены в 1954 на 14 Международном актуарном конгрессе.

Основные принципы, на которых базируется система обозначений заключаются в следующем:

- с каждым основным символом связаны вспомогательные, имеющие определенный смысл в зависимости от их расположения относительно основного;
- местоположение снизу слева от основного используется для того, чтобы показать начало и продолжительность действия;
- местоположение снизу справа от основного используется для того, чтобы показать возраст застрахованного и порядок следования событий;
- местоположение сверху справа от основного используется для того, чтобы показать периодичность событий;
- местоположение сверху слева свободное и может быть использовано для других обозначений.

В дальнейшем изложении используются следующие обозначения:

- буква, заключенная в круглые скобки, например  $(x)$ , обозначает “лицо в возрасте  $x$ ”;
- буква или число, обрамленное справа углом, например  $\overline{n}$  или  $\overline{15}$ , обозначает временной период, равный указанному числу лет (в приведенных примерах:  $n$  лет или 15 лет).

## Основные символные обозначения

### Доход

- $i$  - эффективная годовая процентная ставка;
- $v = (1+i)^{-1}$  - дисконтирующий множитель, т.е. современная стоимость единицы, которая должна быть получена через год;
- $d = 1-v$  - эффективная ставка дисконта;
- $\delta = \log_e(1+i)^{-1} = -\log_e(1-d)$  - сила процента или сила дисконта;

### Таблицы смертности

- $l$  - количество доживших;
- $d$  - количество умерших;
- $p$  - вероятность дожития;
- $q$  - вероятность смерти;
- $\mu$  - интенсивность смертности;

- m - центральная норма смертности;
- a - современная стоимость аннуитета;
- s - накопленная стоимость аннуитета;
- e - ожидаемая продолжительность жизни;
- A - современная стоимость страховки;
- E - современная стоимость страхования на дожитие;
- P - годовая премия (как правило используется для обозначения нетто-премии);
- $\pi$  - годовая премия (используется для обозначения специальных премий);
- V - резерв;
- W - оплаченный полис.

Далее основные символы приобретают более конкретный смысл за счет добавления соответствующих индексов.

### Доход

- $i^{(m)} = m\{(1+i)^{1/m}-1\}$  - номинальная годовая процентная ставка, для процентов, начисляемых m раз в год;
- $a_{\overline{n}|} = v+v^2+\dots+v^n$  - современная стоимость гарантированного аннуитета с единичными выплатами в конце каждого года в течение n лет;
- $\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1+v+v^2+\dots+v^{n-1}$  - современная стоимость гарантированного аннуитета с единичными выплатами в начале каждого года в течение n лет;
- $S_{\overline{n}|} = 1+(1+i)+(1+i)^2+\dots+(1+i)^{n-1}$  - накопленная на момент n стоимость гарантированного аннуитета с единичными выплатами в конце каждого года в течение n лет;
- $\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)+(1+i)^2+\dots+(1+i)^n$  - накопленная на момент n стоимость гарантированного аннуитета с единичными выплатами в начале каждого года в течение n лет.

Точки, расположенные над буквами a и S, используются для обозначения ускорения выплат (авансированные выплаты).

### Таблицы смертности

Возраст лица обозначается индексом, расположенным внизу справа от основного символа.

- $l_x$  - количество доживших до x лет (в соответствии с таблицей смертности);
- $d_x = l_x - l_{x+1}$  - количество умерших в течение года в возрасте от x до x+1 (в соответствии с таблицей смертности);
- $p_x$  - вероятность того, что (x) проживет не менее года;
- $q_x$  - вероятность того, что (x) умрет в течение года;
- $\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx}$  - интенсивность смертности в возрасте x;
- $m_x = d_x \int_0^1 l_{x+t} dt$  - центральная норма смертности для возрастного интервала (x, x+1);

$e_x$  - усеченная ожидаемая остаточная продолжительность жизни (x).

**В дальнейшем будет подразумеваться (если специально не оговорено иное), что**

- годовые выплаты аннуитета равны 1;
- размер страховой суммы (по дожитию и по смерти) равен 1;
- все основные символы определяют современную стоимость.

$a_x$  - пожизненный аннуитет для (x) с выплатами в конце каждого года жизни;

$\ddot{a}_x = 1 + a_x$  - пожизненный аннуитет для (x) с выплатами в начале каждого года жизни;

$A_x$  - страховка, выплачиваемая в конце года смерти (x).

*Примечание:*  $e_x = a_x$  для ставки дохода  $i=0$ .

Буква или цифра, расположенная внизу слева от основного символа, обозначает количество лет, используемое при рассмотрении вероятности или выплаты.

${}_n p_x$  - вероятность того, что (x) проживет не менее n лет;

${}_n q_x$  - вероятность того, что (x) умрет в течение n лет;

*Примечание:* если  $n=1$ , то 1 обычно опускается, как показано выше.

${}_n E_x = v^n {}_n p_x$  - современная стоимость выплаты по дожитию (x) до возраста  $x+n$ .

Буква или число, предшествующее вертикальной черте, означает период отсрочки.

${}_n | q_x$  - вероятность того, что (x) умрет в течение года, отсроченного на n лет, т.е. в возрастном интервале от  $(x+n)$  до  $(x+n+1)$ ;

${}_n | a_x$  - аннуитет для (x) с началом выплат, отложенным на n лет, т.е. выплаты начинаются с возраста  $x+n+1$ ;

${}_n | t a_x$  - отсроченный временный аннуитет для (x) с началом выплат, отложенным на n лет, выплачиваемый в течение t лет.

Буква или число, расположенные в скобках сверху справа от основного символа, показывают число интервалов, на которые разбит год.

$a_x^{(m)}$  - пожизненный аннуитет для (x) с выплатами в размере  $1/m$  в конце каждой m-ой части года;

$\ddot{a}_x^{(m)}$  - пожизненный аннуитет для (x) с выплатами в размере  $1/m$  в начале каждой m-ой части года, так что

$\ddot{a}_x^{(m)} = 1/m + a_x^{(m)}$ ;

$A_x^{(m)}$  - страховка, выплачиваемая в конце m-ой части года, в которой наступила смерть (x).

Если  $m \rightarrow \infty$ , то над основным символом помещается горизонтальная черта.

$\bar{a}$  - непрерывный аннуитет;

$\bar{A}$  - страховка, выплачиваемая сразу после смерти.

Маленький кружок, расположенный над основным символом, показывает, что величина полная.

$\overset{\circ}{a}$  - полный аннуитет;

$\overset{\circ}{e}$  - ожидаемая остаточная продолжительность жизни.

*Примечание:* некоторые считают, что обозначение  $\bar{e}$  равноценно обозначению  $e$ . Поскольку  $e_x = a_x$  при  $i=0$ , то ожидаемая остаточная продолжительность жизни равна  $\bar{a}_x$  при  $i=0$ .

Следующие правила используются, когда речь идет о жизнях нескольких лиц:

если в индексе (справа снизу от основного символа) расположено несколько букв или цифр без каких-либо дополнительных отличий, то они рассматриваются как совместный статус. Например:

$$l_{xy} = l_x \times l_y, \quad d_{xy} = l_{xy} - l_{x+1:y+1}.$$

*Примечание:* Иногда для избежания неоднозначного понимания числа или буквы в индексе разделяются двоеточием (например, 20:30 или  $x:\bar{n}|$ ). Двоеточие было выбрано вместо точки или запятой, чтобы не было путаницы с десятичным разделителем при использовании в индексе чисел.

$a_{xyz}$  - аннуитет с выплатами в конце года, продолжающимися пока (x), (y) и (z) живы (пока не умер кто-либо из трех);

$A_{xyz}$  - страховка, выплачиваемой в конце года смерти первого из (x), (y) и (z).

Вместо жизни одного из застрахованных в индексе может быть указан конкретный срок:

$a_{x:\bar{n}|}$  - аннуитет с выплатами, продолжающимися пока статус  $x:\bar{n}|$  является действующим (активным), т.е. пока жив (x) и не истекло n лет;

$A_{x:\bar{n}|}$  - страховка, выплачиваемая в случае нарушения статуса  $x:\bar{n}|$  (статус становится недействующим или неактивным), т.е. либо в конце года смерти (x), если она произошла в течение n лет, либо по прошествии n лет, если (x) жив (смешанное страхование на n лет).

Если вертикальная черта разделяет буквы в индексе, то статус после черты должен следовать за статусом до черты:

- $a_{y|x}$  - аннуитет для (x) с выплатами, начинающимися после смерти (y) (обращенный аннуитет);
- $A_{z|xy}$  - страховка, выплачиваемая в конце года смерти первого из (x) и (y), если она наступит после смерти (z).

Если над индексом расположена горизонтальная черта, то это означает, что событием является дожитие всех указанных в индексе лиц (статус дожития). Количество доживших может быть указано буквой или числом над правым концом горизонтальной черты. Если буква над чертой, например  $g$ , заключена в квадратные скобки  $[g]$ , то имеются в виду ровно  $g$  доживших. Буква  $g$  без квадратных скобок означает “по крайней мере  $g$  доживших”. Если над чертой не указано ни букв, ни цифр, то имеется в виду единица, что значит “по крайней мере 1 доживший”.

- $a_{xyz}$  - аннуитет с выплатами в конце года, продолжающимися пока хотя бы один из (x), (y) и (z) жив;
- $a_{xyz}^2$  - аннуитет с выплатами в конце года, продолжающимися пока хотя бы двое из (x), (y) и (z) живы;
- $p_{xyz}^{[2]}$  - вероятность того, что ровно двое из трех живущих (x), (y) и (z) проживут еще один год;
- ${}_nq_{xy} = {}_nq_x \times {}_nq_y$  - вероятность того, что и (x) и (y) умрут в течение следующих  $n$  лет;
- ${}_nA_{xy}$  - страховка, выплачиваемая в конце года смерти пережившего из двух застрахованных (x) или (y), если смерть произойдет в течение  $n$  лет.

Числа, расположенные над или под буквами индекса, означают порядок, в котором должна произойти смерть застрахованных. Число, помещенное над какой-либо буквой индекса, указывает лицо, смерть которого является финальным событием. Числа, расположенные под индексами показывают порядок, в котором должна произойти смерть других лиц.

- $A_{xy}^1$  - страховка, выплачиваемая в конце года смерти (x), если он умрет раньше (y);
- $A_{xyz}^2$  - страховка, выплачиваемая в конце года смерти (x), если он умрет вторым из трех (x), (y) и (z);
- $A_{xyz}^2_1$  - страховка, выплачиваемая в конце года смерти (x), если он умрет после (y), но до (z);
- $A_{xy:z}^2_3$  - страховка, выплачиваемая в конце года смерти последнего из двух (x) и (y), если она наступит раньше смерти (z);
- $A_{x:\bar{n}}^1$  - страховка, выплачиваемая в конце года смерти (x), если она произошла в течение  $n$  лет;
- $a_{yz|x}^1$  - аннуитет с выплатами в конце каждого года жизни (x), начинающимися после

или смерти (y) и (z), при условии, что (z) умрет раньше (y).

$$a_{yz|x}^2$$

*Примечание:* Иногда, для более четкого понимания того, что речь идет о совместном статусе, его составляющие объединяют расположенным сверху символом —. Например,

$A_{xy:n}^1$  - страховка, выплачиваемая в конце года смерти (x) или (y) - первая смерть, если смерть наступит в течение n лет, т.е. это совместное страхование на срок.

В некоторых случаях, если необходимо уточнить начало выплат реверсивного аннуитета, используется специальный символ, расположенный над основным. Например:

$a_{y|x}$  - аннуитет для (x), первая выплата производится в конце года смерти (y), т.е. в среднем через 6 месяцев;

$\hat{a}_{y|x}$  - аннуитет для (x), первая выплата производится через год после смерти (y);

°

$a_{y|x}$  - полный аннуитет для (x) с первой выплатой через год после смерти (y).

## Годовые премии

Символ P с одним или несколькими индексами используется в простых, исключающих неправильное понимание, случаях и обозначает годовую премию (годовой взнос).

$P_x$  - размер годового взноса, обеспечивающего пожизненную страховку, выплачиваемую в конце года смерти (x);

$P_{x:\bar{n}}$  - размер годового взноса, обеспечивающего смешанную страховку, выплачиваемую либо в конце года смерти (x), если она произошла в течение n лет, либо по прошествии n лет (в случае дожития (x));

$P_{xy}^1$  - размер годового взноса для страховки по которой страховая выплата будет произведена в конце года смерти (x), если он умрет до (y).

В случаях, рассмотренных выше, необязательно было использовать символ P вместе с основным символом, обозначающим выплату. Так вместо  $P_{x:\bar{n}}$  можно было написать  $P(A_{x:\bar{n}})$ . В более сложных случаях необходимо использовать два символа. Индексы, показывающие условия выплаты страховки, связываются с основным символом (например A или a), а индексы, показывающие условия уплаты взносов, связываются с символом P.

${}_n P(\bar{A}_x)$  - размер годового взноса, уплачиваемого в течение n лет за страховку, которая будет выплачена в момент смерти (x);

$P_{xy}(A_x)$  - размер годового взноса, уплачиваемого пока живы (x) и (y) за страховку, которая должна быть выплачена в конце года смерти (x);

- ${}_n P(\eta | a_x)$  - размер годового взноса, уплачиваемого в течение  $n$  лет за пожизненный аннуитет с выплатами, отложенными на  $n$  лет;
- ${}_t P^{(m)}(A_{x:\overline{n}|})$  - размер годового взноса, уплачиваемого в течение  $t$  лет по  $m$  раз в год равными частями и обеспечивающего смешанное страхование ( $x$ ) на срок  $n$  лет.

*Примечание:*

1) В общем случае символ  $P$  мог быть использован без основного символа в случаях, когда страховая сумма выплачивалась в конце года смерти. Если страховая сумма выплачивается иначе или предполагается выплата в виде аннуитета, то необходимо в обозначениях использовать основной символ.

2)  $P_x^{(m)}$ . Существуют два вида премий, которые уплачиваются  $m$  раз в год: премии, уплата которых прекращается сразу после смерти застрахованного, и премии, которые продолжают уплачиваться до конца года смерти застрахованного. Чтобы отличать последний из указанных видов премии букву  $m$  иногда заключают в квадратные скобки:  $P_x^{[m]}$ .

## Резерв и оплаченный полис

${}_t V_x$  - резерв по полису обычного пожизненного страхования ( $x$ ), действовавшему в течение  $t$  лет. Отметим, что расчет резерва производится до уплаты очередного взноса.

${}_t W_x$  - оплаченный полис, современная величина резерва по которому равна  ${}_t V_x$ .

Символы  $V$  и  $W$  в простых случаях могут использоваться самостоятельно (в качестве основных). В более сложных случаях необходимо использовать также символ, определяющий страховые выплаты:

$${}_t V^{(m)}(\overline{A}_{x:\overline{n}|}) \text{ (соответствует } P^{(m)}(A_{x:\overline{n}|}) \text{), } {}_t V(\eta | a_x)$$

*Примечание:* Как правило символы  $V$  и  $W$  используются в качестве основных (самостоятельно), если страховая сумма выплачивается в конце года смерти, а взносы уплачиваются периодически на протяжении всего срока страхования. Если взносы уплачиваются ограниченное число лет, например  $n$ , то величина резерва по прошествии  $t$  лет обозначается следующим образом  ${}_t V[{}_n P(A)]$  или  ${}_t V(A)$ .

Если в формулах используются модифицированные переменные, то для их обозначения дополнительно могут использоваться один или несколько штрихов. Например, если в оценке резерва используется премия, отличная от нетто-премии, то она может быть обозначена  $P'$  и соответственно резерв  $V'$ . Аналогично, брутто-премия может быть обозначена  $P''$  и соответствующий оплаченный полис  $W''$ .



## Составные символы

- (Ia) - аннуитет с ежегодными выплатами, возрастающими на 1 в год; размер первой выплаты - 1;  
(IA) - страховка, размер которой увеличивается на 1 в год; начальная величина страховки равна 1.

Если речь идет о страховании на срок, то показатели времени располагаются за круглыми скобками.

- $(Ia)_{x:\overline{n}|}$  - временный возрастающий аннуитет для (x);  
 $(IA)_{x:\overline{n}|}^1$  - временная возрастающая страховка.

Если возрастание выплаты происходит в течение определенного срока, но при этом срок страхования (выплат) продолжается далее - символ ограничения по времени располагают сразу после буквы I.

- $(I_{\overline{n}|}a)_x$  - пожизненный аннуитет с выплатами, возрастающими в течение n лет, далее выплаты остаются неизменными;  
 $(I_{\overline{n}|}A)_x$  - пожизненная страховка, размер которой возрастает в течение n лет, а затем остается постоянным.

Если страхование предусматривает убывающие выплаты, то для обозначения используется символ D. Естественно, убывающие выплаты всегда должны иметь ограничение по времени.

- $(D_{\overline{n}|}A)_{x:\overline{n}|}^1$  - страховка, убывающая ежегодно на 1 и выплачиваемая в конце года смерти (x), если она произойдет в течение n лет; начальная стоимость страховки равна n.

Если выплаты являются изменяемыми величинами, то для их обозначения используется символ v.

- (va) - аннуитет с изменяющимся размером выплат.

## Коммутационные числа

## Одна жизнь

$$\begin{aligned}D_x &= v^x l_x \\N_x &= D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots \\S_x &= N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \dots \\C_x &= v^{x+1} d_x \\M_x &= C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots \\R_x &= M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \dots\end{aligned}$$

Для обозначения коммутационных чисел, применяемых для расчетов выплат, производимых непосредственно в момент смерти, используется горизонтальная черта, расположенная над соответствующим символом.

$$\begin{aligned}\bar{C}_x &= v^{x+1/2} d_x, \text{ что является приближением } \int_0^1 v^{x+t} \mu_{x+t} l_{x+t} dt \\ \bar{M}_x &= \bar{C}_x + \bar{C}_{x+1} + \bar{C}_{x+2} + \dots \\ \bar{R}_x &= \bar{M}_x + \bar{M}_{x+1} + \bar{M}_{x+2} + \dots\end{aligned}$$

## Несколько жизней

$$\begin{aligned}D_{xy} &= v^{1/2(x+y)} l_{xy} \\N_{xy} &= D_{xy} + D_{x+1:y+1} + D_{x+2:y+2} + \dots \\C_{xy} &= v^{1/2(x+y)+1} d_{xy} \\M_{xy} &= C_{xy} + C_{x+1:y+1} + C_{x+2:y+2} + \dots \\C_{xy}^1 &= v^{1/2(x+y)+1} d_x l_{y+1/2} \\M_{xy}^1 &= C_{xy}^1 + C_{x+1:y+1}^1 + C_{x+2:y+2}^1 + \dots\end{aligned}$$

## Селекция

Если в индексе символ, обозначающий возраст, заключен в квадратные скобки, то это означает, что данный возраст является селективным (возраст отбора на страхование). К данному возрасту может за пределом скобок быть прибавлено еще некоторое число лет, прошедшее с момента селекции, так что весь индекс будет обозначать современный возраст.

- $l_{[x]+t}$  - число из селективной таблицы смертности, обозначающее количество лиц, отобранных в возрасте  $x$  и доживших до возраста  $x+t$ ;
- $d_{[x]+t} = l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}$
- $a_{[x]}$  - пожизненный аннуитет застрахованного лица (отобранного), находящегося в

$a_{[x-n]+n}$  - данный момент в возрасте  $x$  (селекция произошла в возрасте  $x$ );  
пожизненный аннуитет лица, застрахованного (отобранного) в возрасте  $(x-n)$   
(селекция произошла  $n$  лет назад).

$$N_{[x]} = D_{[x]} + D_{[x]+1} + D_{[x]+2} + \dots$$

$$\ddot{a}_{[x]} = N_{[x]} / D_{[x]} = 1 + a_{[x]},$$

аналогичные обозначения используются для других функций.

## Заключение

В некоторых случаях международная актуарная нотация допускает разные обозначения для одних и тех же величин, например, временный аннуитет может обозначаться  $a_{x:\overline{n}|}$  или  ${}_n a_x$ . Это является естественным следствием применяемых принципов и никакая из альтернативных форм не может быть запрещена.

Международная актуарная нотация хотя и не является исчерпывающей - в ней, в частности, отсутствуют ряд обозначений, используемых при оценивании пенсионных фондов - очень удобна тем, что она одинаково применяется во всей имеющейся мировой литературе.

При подготовке русского издания нотации основной проблемой являлось отсутствие общепринятой русскоязычной терминологии. В частности:

- авторы, по аналогии с англоязычным термином *insurance*, ввели для определения современной стоимости выплат по страхованию на случай смерти и/или дожития, термин “страховка”. Это позволяет использовать краткую запись типа:  $A$  - современная стоимость страховки, вместо  $A$  - современная стоимость выплат по смерти и/или дожитию;
- авторы использовали термин “гарантированный” аннуитет для обозначения аннуитета, не зависящего от дожития. Может быть лучше было бы применить термин “финансовый” аннуитет, а для аннуитета, выплачиваемого при условии дожития - страховой аннуитет?
- нам не удалось подобрать удачный термин для “реверсивного” аннуитета  $a_{y|x}$ , называемого в англоязычной литературе *reversionary annuities* и т.д.

Авторы будут благодарны за замечания и предложения, которые будут полезны для стандартизации российской терминологию по актуарным вопросам страхования жизни. Факс Комитета по страхованию жизни Российского общества актуариев: (095) 967-3577.